

## 2013 年 1 月联考数学真题

1. 某工厂生产一批零件, 计划 10 天完成任务, 实际提前 2 天完成, 则每天的产量比计划平均提高了 ( )

- A. 15%      B. 20%      C. 25%      D. 30%      E. 35%

【参考答案】C

【知识点】百分比、增长比

【名师讲解】原来的效率为  $\frac{1}{10}$ , 现在的效率为  $\frac{1}{8}$ , 所以每天比原计划提高了  $\frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{10}}{\frac{1}{10}} = 25\%$ , 答案 C

2. 甲乙两人同时从 A 点出发, 沿 400 米跑道同向匀速行走, 25 分钟后乙比甲少走了一圈, 若乙行走一圈需要 8 分钟, 甲的速度是 ( ) (单位: 米/分钟)

- A. 62      B. 65      C. 66      D. 67      E. 69

【参考答案】C

【知识点】路程问题、跑圈问题

【名师讲解】设甲乙的速度分别为  $V_1, V_2$ , 则  $V_2 = \frac{400}{8} = 50, V_1 - V_2 = \frac{400}{25} = 16$ , 所以

$V_1 = V_2 + 16 = 50 + 16 = 66$ , 答案 C

3. 甲班共有 30 名学生, 在一次满分为 100 分的测试中, 全班平均成绩为 90 分, 则成绩低于 60 分的学生至多有 ( ) 个

- A. 8      B. 7      C. 6      D. 5      E. 4

【参考答案】B

【知识点】至少至多问题

【名师讲解】先假设每人得分 100 分, 总分为 3000 分, 实际总分是 2700 分, 最少扣 41 分, 所以  $41x \leq 3000 - 2700 \Rightarrow x \leq 7.5$  所以 60 分以下的人数最多为 7 人, 答案 B

4. 某工程由甲公司 60 天完成, 由甲、乙两公司共同承包需要 28 天完成, 由乙、丙两公司共同承包需要 35 天完成, 则有丙公司承包完成该工程需要的天数为 ( )

- A. 85      B. 90      C. 95      D. 100      E. 105

【参考答案】E

【知识点】工程问题

【名师讲解】设乙丙两公司单独完成分别需要  $x, y$  天, 由甲、乙两公司共同承包需 28 天完成可得

$\left(\frac{1}{60} + \frac{1}{x}\right) \times 28 = 1$ , 同理  $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \times 35 = 1$ , 解得  $y = 105$ , 丙公司承包完成该工程需要 105 天, 选 E

5、已知  $f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \dots + \frac{1}{(x+9)(x+10)}$ , 则  $f(8) = (\quad)$

- A  $\frac{1}{9}$       B  $\frac{1}{10}$       C  $\frac{1}{16}$       D  $\frac{1}{17}$       E  $\frac{1}{18}$

【参考答案】E

【知识点】长串数字求和简化

【名师讲解】列项相消  $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} + \dots + \frac{1}{x+9} - \frac{1}{x+10} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+10}$

所以  $f(8) = \frac{1}{8+1} - \frac{1}{8+10} = \frac{1}{18}$ , 故选 E

6. 甲乙两商店同时购进了一批某品牌电视机, 当甲店售出 15 台时乙售出了 10 台, 此时两店的库存比为 8:7, 库存差为 5, 甲乙两店总进货量为 ( )

- A. 75      B. 80      C. 85      D. 100      E. 125

【参考答案】D

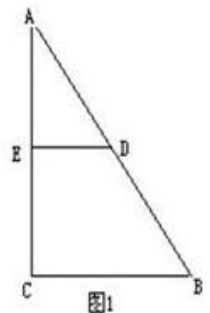
【知识点】比例问题

【名师讲解】设甲乙两商店的进货量分别为  $x, y$ 。由题意得:

$$\begin{cases} \frac{x-15}{y-10} = \frac{8}{7} \\ (x-15) - (y-10) = 5 \end{cases} \quad \text{联立方程解得} \begin{cases} x = 55 \\ y = 45 \end{cases}, \text{所以甲乙两店的总进货量为 } 100, \text{ 选 D}$$

7. 如图 1, 在直角三角形 ABC 中,  $AC=4$ ,  $BC=3$ ,  $DE \parallel BC$ , 已知梯形 BCDE 的面积为 3, 则 DE 长为 ( )

- A.  $\sqrt{3}$       B.  $\sqrt{3}+1$       C.  $4\sqrt{3}-4$       D.  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$       E.  $\sqrt{2}+1$



【参考答案】D

【知识点】利用相似求长度

【名师讲解】 $S_{\triangle AED} = 6 - 3 = 3$ ; 根据相似三角形的面积之比等于相似比的平方可以得到:

$$\frac{S_{\triangle AED}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{DE}{BC}\right)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow DE = \frac{3}{2}\sqrt{2}, \text{ 故选 D}$$

8. 点 (0, 4) 关于  $2x+y+1=0$  的对称点为 ( )

- A. (2, 0)      B. (-3, 0)      C. (-6, 1)      D. (4, 2)      E. (-4, 2)

【参考答案】E

【知识点】对称问题

【名师讲解】设对称点为  $(x_0, y_0)$ , 则有 
$$\begin{cases} \frac{y_0 - 4}{x_0} = \frac{1}{2} \\ 2 \times \frac{x_0}{2} + \frac{y_0 + 4}{2} + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -4 \\ y_0 = 2 \end{cases}, \text{ 故选 E}$$

9.  $(x^2 + 3x + 5)^5$  的展开式中,  $x^2$  的系数为 ( )

- A 5      B 10      C 45      D 90      E 95

【参考答案】E

【知识点】求展开式系数

【名师讲解】 $(x^2 + 3x + 5)^5 = (x^2 + 3x + 5)(x^2 + 3x + 5)(x^2 + 3x + 5)(x^2 + 3x + 5)(x^2 + 3x + 5)$ , 含有  $x^2$  的项有两种: 一种是 5 个式子选两个  $3x$ , 其他 3 个选常数项, 有  $C_5^2 \times 3^2 \times 1^3$ ; 一种是选一个  $x^2$ , 其他 4 个选常数项, 有  $C_5^1 \times 1^4$ , 故系数为  $C_5^2 \times 3^2 \times 1^3 + C_5^1 \times 1^4 = 90 + 5 = 95$ , 选 E

10. 有一批水果要装箱, 一名熟练工单独装箱需要 10 天, 每天报酬为 200 元; 一名普通工单独装箱需要 15 天, 每天报酬为 120 元, 由于场地限制, 最多可同时安排 12 人装箱, 若要求在一天内完成装箱任务, 则支付的最少报酬为 ( ) 元

- A 1800      B 1840      C 1920      D 1960      E 2000

【参考答案】C

【知识点】线性规划

【名师讲解】设需要  $x$  名熟练工,  $y$  名普通工, 由于熟练工单独需要 10 天, 普通工需要 15 天, 取最小公倍数, 故设总工作量为 150, 则有: 
$$\begin{cases} x + y \leq 12 \\ 10x + 15y = 150 \end{cases} \Rightarrow 5x \leq 30 \Rightarrow x \leq 6; \text{ 因此 6 个熟练工,}$$

6 个普通工即可, 最小报酬为  $1200 + 720 = 1920$ , 故选 C

11. 将体积为  $4\pi\text{cm}^3$  和  $32\pi\text{cm}^3$  的两个实心金属球熔化后铸成一个实心大球, 则大球表面积为 ( )

- A  $32\pi\text{cm}^2$       B  $36\pi\text{cm}^2$       C  $38\pi\text{cm}^2$       D  $40\pi\text{cm}^2$       E  $42\pi\text{cm}^2$

【参考答案】B

【知识点】球的表面积

【名师讲解】由于体积不变，所以体积  $\frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi \Rightarrow r = 3$ ，大球的表面积为  $S = 4\pi r^2 = 36\pi$ ，

选 B

12、已知抛物线  $y = x^2 + bx + c$  的对称轴为  $x = 1$ ，且过点  $(-1, 1)$ ，则

A  $b = -2, c = -2$     B  $b = 2, c = 2$     C  $b = -2, c = 2$

D  $b = -1, c = 1$     E  $b = 1, c = 1$

【参考答案】A

【知识点】抛物线

【名师讲解】根据对称轴公式和点的坐标得到  $\begin{cases} -\frac{b}{2} = 1 \\ 1 - b + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -2 \\ c = -2 \end{cases}$ ，故选 A

13. 已知  $\{a_n\}$  为等差数列，若  $a_2$  与  $a_{10}$  是方程  $x^2 - 10x - 9 = 0$  的两个根，则  $a_5 + a_7 =$  ( )

A. -10    B. -9    C. 9    D. 10    E. 12

【参考答案】D

【知识点】数列元素性质、韦达定理

【名师讲解】根据等差数列性质及韦达定理得： $a_5 + a_7 = a_2 + a_{10} = 10$ ，故选 D

14、已知 10 件产品中有 4 件一等品，从中任取 2 件，则至少有一件一等品的概率为( )

A  $\frac{1}{3}$     B  $\frac{2}{3}$     C  $\frac{2}{15}$     D  $\frac{8}{15}$     E  $\frac{13}{15}$

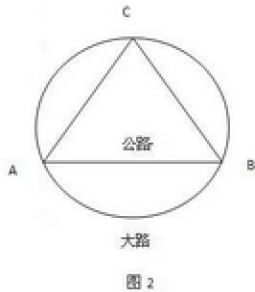
【参考答案】B

【知识点】古典概率

【名师讲解】从反面求解，至少有一件一等品的概率  $P = 1 - \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{2}{3}$ ，故选 B

15. 确定两人从A地出发经过B, C, 沿逆时针方向行走一圈回到A地的方案(如图2), 若从A地出发时每人均可选大路或山道, 经过B, C时, 至多有一人可以更改道路, 则不同的方案有( )

- A. 16种      B. 24种      C. 36种      D. 48种      E. 64种



【参考答案】C

【知识点】排列组合、乘法原理

【名师讲解】分步原理, 从A到B, 每人有两种, 所以两人有4种; 从B到C, 如果至多有一人变道, 两人有3种; 从C到A, 两人有3种, 从而总共有 $4 \times 3 \times 3 = 36$ 种, 故选C

16. 已知平面区域 $D_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 9\}$ ,  $D_2 = \{(x, y) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq 9\}$ , 则

$D_1, D_2$  覆盖区域的边界长度为 $8\pi$ .

- (1)  $x_0^2 + y_0^2 = 9$       (2)  $x_0 + y_0 = 3$

【参考答案】A

【知识点】圆与圆的位置关系, 弧长

【名师讲解】单独看条件(1), 可以得到两圆圆心距为3, 两圆的圆心分别在另一个圆上, 故每个圆在外面的弧长为 $4\pi$ , 所以覆盖区域的边界长度为 $8\pi$ , 充分; 条件(2), 无法确定圆心距, 不充分, 选A

17.  $p = mq + 1$  为质数

- (1) m 为正整数, q 为质数

- (2) m, q 均为质数

【参考答案】E

【知识点】数的概念

【名师讲解】条件(1)(2)联合起来可以取反例 $m = p = 3$ , 显然不满足结论, 不充分, 选E

18、 $\triangle ABC$ 的边长分别为 $a, b, c$ ，则 $\triangle ABC$ 为直角三角形。

$$(1) (c^2 - a^2 - b^2)(a^2 - b^2) = 0$$

$$(2) \triangle ABC \text{ 的面积为 } \frac{1}{2}ab.$$

【参考答案】B

【知识点】三角形的判断

【名师讲解】条件（1）只能得到直角或等腰三角形，不充分；条件（2）是直角三角形面积计算公式，所以充分，选 B

19、已知二次函数  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ，则方程  $f(x) = 0$  有两个不同实根。

$$(1) a + c = 0$$

$$(2) a + b + c = 0$$

【参考答案】A

【知识点】方程根的情况

【名师讲解】由题意得  $f(x)$  为二次函数所以  $a \neq 0$ ，条件一  $a+c=0$  则  $a, c$  必异号，此时二次函数根的判别式必然大于 0，所以条件（1）充分；条件（2）可推出  $b=-(a+c)$ ，此时判别式  $\Delta \geq 0$  所以条件（2）不充分，所以答案选 A

20、档案馆在一个库房中安装了  $n$  个烟火感应报警器，每个报警器遇到烟火发出警报的概率均为  $p$ 。该库房遇烟火发出警报的概率达到 0.999。

$$(1) n=3, p=0.9$$

$$(2) n=2, p=0.97$$

【参考答案】D

【知识点】独立事件的概率

【名师讲解】由条件（1），该库房遇烟火发出警报的概率为  $p = 1 - (1 - 0.9)^3 = 0.999$ ，充分；由条件（2）该库房遇烟火发出警报的概率为  $p = 1 - (1 - 0.97)^2 = 0.9991 > 0.999$ ，充分，选 D

21、已知  $a, b$  是实数，则  $|a| \leq 1, |b| \leq 1$ 。

(1)  $|a+b| \leq 1$       (2)  $|a-b| \leq 1$

【参考答案】C

【知识点】三角不等式

【名师讲解】单独看都不充分，需要联合分析，根据三角不等式，

$2|a| = |(a-b) + (a+b)| \leq |a-b| + |a+b| \leq 2 \Rightarrow |a| \leq 1$ ，同理  $|b| \leq 1$ ，充分，故选 C

22、设  $x, y, z$  为非零实数，则  $\frac{2x+3y-4z}{-x+y-2z} = 1$

(1)  $3x-2y=0$       (2)  $2y-z=0$

【参考答案】C

【知识点】分式的化简运算

【名师讲解】单独看都不充分，联合分析  $\frac{2x+3y-4z}{-x+y-2z} = \frac{\frac{4}{3}y+3y-8y}{-\frac{2}{3}y+y-4y} = 1$ ，充分，故选 C

23. 某单位年终共发了 100 万元奖金，奖金金额分别是一等奖 1.5 万元，二等奖 1 万元，三等奖 0.5 万元，则该单位至少有 100 人

(1) 得二等奖的人数最多      (2) 得三等奖的人数最多

【参考答案】B

【知识点】至多至少问题

【名师讲解】条件 (1)，可取反例，比如一等奖 30 人，二等奖 50 人，三等奖 10 人，总人数小于 100 人，不充分；条件 (2)，设一等奖、二等奖、三等奖的人数分别为  $x, y, z$ ，则题干

$1.5x + y + 0.5z = (x + y + z) + 0.5(x - z) = 100$ ，条件 (2) 可以得到  $x - z \leq 0$ ，从而  $x + y + z \geq 100$ ，充分。故选 B

24. 三个科室的人数分别为 6、3 和 2，因工作需要，每晚需要安排 3 人值班，则在两个月中以便每晚的值班人员不完全相同

(1) 值班人员不能来自同一科室      (2) 值班人员来自三个不同科室

【参考答案】A

【知识点】排列组合

【名师讲解】由（1）值班人员不能来自同一科室，共有  $C_{11}^3 - C_6^3 - C_3^3 = 144$ ，两个月最多 62 天，可以保证每天晚值班的人不完全相同，充分；由（2）值班人员来自三个不同科室，只有  $C_5^1 C_3^1 C_2^1 = 36$ ，无法保证每晚值班的人不完全相同，不充分，选 A

$$25、 a_1 = 1, a_2 = k, \dots, a_{n+1} = |a_n - a_{n-1}|, (n \geq 2), \text{ 则 } a_{100} + a_{101} + a_{102} = 2$$

- (1)  $k = 2$       (2)  $k$  是小于 20 的正整数。

【参考答案】D

【知识点】数列元素规律

【名师讲解】寻找数字变化规律，条件（1），此数列 1,2,1,1,0,1,1,0, 1, 1,0...，所以后面任意连续三项之和为 2，充分；由条件（2），此数列为 1, k,k-1,k-2,k-3,k-4,k-5...k-k,1,1,0,1,1,0, ...,所以后面任意连续三项之和也为 2，充分，故选 D